ত্রয়োদশ অধ্যায়

# সসীম ধারা
# (Finite Series)

প্রাত্যহিক জীবনে 'ক্রম' বহুল প্রচলিত একটি শব্দ। যেমন– দোকানের তাকে তোগ্যপণ্য সাজাতে, নাটক ও অনুষ্ঠানের ঘটনাবলী সাজাতে, গুদামঘরে সুন্দরভাবে দ্রব্যাদি রাখতে ক্রমের ধারণা ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক কাজ সহজে এবং দৃষ্টিনন্দনভাবে সম্পাদন করতে আমরা বড় হতে ছোট, শিশু হতে বৃদ্ধ, হালকা হতে ভারী ইত্যাদি ধরনের ক্রম ব্যবহার করি। এই ক্রমের ধারণা হতেই বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক ধারার উদ্ভব হয়েছে। এই অধ্যায়ে অনুক্রম ও ধারার মধ্যে সম্পর্ক ও এতদসংক্রান্ত বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে ও তাদের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- সমান্তর ধারা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

## অনুক্রম

**নিচের সম্পর্কটি লক্ষ করি :**

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & n & \cdots\cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots\cdots & 2n & \cdots\cdots \end{array}$$

এখানে প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা $n$ তার দ্বিগুণ সংখ্যা $2n$ এর সাথে সম্পর্কিত। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, .....\}$ থেকে একটি নিয়মের মাধ্যমে যোগবোধক জোড় সংখ্যার সেট $\{2, 4, 6, 8, .....\}$ পাওয়া যায়। এই সাজানো জোড়সংখ্যার সেটটি একটি অনুক্রম। সুতরাং, কতকগুলো রাশিকে একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

উপরের সম্পর্কটিকে ফাংশন বলে এবং $f(n)=2n$ লিখা হয়। এই অনুক্রমের সাধারণ পদ $2n$. যেকোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম। অনুক্রমটি সাধারণ পদের সাহায্যে লিখার পদ্ধতি হলো $\{2n\}, n=1,2,3,\ldots\ldots$ বা, $\{2n\}_{n=1}^{+\infty}$ বা, $\{2n\}$.

অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। 1, 3, 5, 7,... ... অনুক্রমের প্রথম পদ $=1$, দ্বিতীয় পদ $=3$, ইত্যাদি।

নিচে অনুক্রমের চারটি উদাহরণ দেওয়া হলো :

$1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, n, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1, \quad 3, \quad 5, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, (2n-1), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1, \quad 4, \quad 9, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, n^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**কাজ :** ১। নিচে ছয়টি অনুক্রমের সাধারণ পদ দেওয়া আছে। অনুক্রমগুলি লিখ :

$(i)\ \frac{1}{n} \quad (ii)\ \frac{n-1}{n+1} \quad (iii)\ \frac{1}{2^n} \quad (iv)\ \frac{1}{2^{n-1}} \quad (v)\ (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} \quad (vi)\ (-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$ .

২। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লিখ।

## ধারা

কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (Series) পাওয়া যায়। যেমন, $1+3+5+7+\ldots\ldots$ একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার $2+4+8+16+\ldots\ldots$একটি ধারা। এর পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। সুতরাং, যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর নির্ভর করে ধারাটির বৈশিষ্ট্য। ধারাগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ দুইটি ধারা হলো সমান্তর ধারা ও গুণোত্তর ধারা।

## সমান্তর ধারা

কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।

**উদাহরণ :** $1+3+5+7+9+11$ একটি ধারা।

এই ধারাটির প্রথম পদ $1$, দ্বিতীয় পদ $3$, তৃতীয় পদ $5$, ইত্যাদি।

এখানে, দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ $= 3-1=2$, তৃতীয় পদ – দ্বিতীয় পদ $= 5-3=2$,

চতুর্থ পদ – তৃতীয় পদ $= 7-5=2$, পঞ্চম পদ – চতুর্থ পদ $= 9-7=2$,

ষষ্ঠ পদ – পঞ্চম পদ $=11-9=2$

সুতরাং, ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

এই ধারায় প্রাপ্ত দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। উলিখিত ধারার সাধারণ অন্তর 2. ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি সসীম বা সান্তধারা (Finite Series)। উলেখ্য, সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট না হলে তাকে অসীম বা অনন্তধারা (Infinite Series) বলে। যেমন, $1+4+7+10+\ldots\ldots$ একটি অসীম ধারা। সমান্তর ধারায় সাধারণত প্রথম পদকে $a$ দ্বারা এবং সাধারণ অন্তরকে $d$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ $a$ হলে, দ্বিতীয় পদ $a+d$, তৃতীয় পদ $a+2d$, ইত্যাদি। সুতরাং, ধারাটি হবে, $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots$.

## সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ $=a$ ও সাধারণ অন্তর $=d$ ; তাহলে ধারাটির

| | | |
|---|---|---|
| প্রথম পদ | $=a$ | $=a+(1-1)\,d$ |
| দ্বিতীয় পদ | $=a+d$ | $=a+(2-1)\,d$ |
| তৃতীয় পদ | $=a+2d$ | $=a+(3-1)\,d$ |
| চতুর্থ পদ | $=a+3d$ | $=a+(4-1)\,d$ |
| .... .... .... | .... | .... .... .... |
| .... .... .... | .... | .... .... .... |

$\therefore$ $n$তম পদ $= a+(n-1)d$

এই $n$তম পদকেই সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ $a$, সাধারণ অন্তর $d$ জানা থাকলে $n$তম পদে $n=1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ বসিয়ে পর্যায়ক্রমে ধারাটির প্রত্যেকটি পদ নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অন্তর 2।

অতএব, ধারাটির $n$তম পদ $=3+(n-1)\times 2=2n+1$.

**কাজ :** কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 7 হলে, ধারাটির প্রথম ছয়টি পদ, 22তম পদ, $r$ তম পদ এবং $(2p+1)$তম পদ নির্ণয় কর।

**উদাহরণ ১।** $5+8+11+14+\cdots\cdots$ ধারাটির কোন পদ 383 ?

**সমাধান :** ধারাটির প্রথম পদ $a=5$, সাধারণ অন্তর $d=8-5=11-8=3=14-11=3$

ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির $n$তম পদ = 383

আমরা জানি, $n$তম পদ = $a+(n-1)d$.

$\therefore$ $a+(n-1)d=383$

বা, $5+(n-1)3=383$

বা, $5+3n-3=383$

বা, $3n=383-5+3$

বা, $3n=381$

বা, $n=\dfrac{381}{3}$

$\therefore$ $n=127$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 127তম পদ = 383.

## সমান্তর ধারার $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ $a$, শেষ পদ $p$, সাধারণ অন্তর $d$, পদ সংখ্যা $n$ এবং ধারাটির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n$.

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে শেষ পদ পর্যন্ত এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে প্রথম পদ পর্যন্ত লিখে পাওয়া যায়

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(p-2d)+(p-d)+p \qquad (i)$$

এবং $$S_n = p+(p-d)+(p-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \qquad (ii)$$

যোগ করে, $2S_n = (a+p)+(a+p)+(a+p)+\ldots\ldots+(a+p)+(a+p)+(a+p)$

বা, $2S_n = n(a+p)$ [ $\because$ ধারাটির পদ সংখ্যা $n$ ]

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(a+p) \qquad (iii)$$

আবার, $n$তম পদ $= p = a+(n-1)d$. $p$ এর মান $(iii)$ এ বসিয়ে পাই,

$$S_n = \frac{n}{2}[a+\{a+(n-1)d\}]$$

অর্থাৎ, $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ ..... (iv)

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ $a$, শেষ পদ $p$ এবং পদ সংখ্যা $n$ জানা থাকলে, $(iii)$ নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু প্রথম পদ $a$, সাধারণ অন্তর $d$, পদ সংখ্যা $n$ জানা থাকলে, $(iv)$ নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

## প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $S_n$

অর্থাৎ, $S_n = 1+2+3+\cdots\cdots\cdots+(n-1)+n \qquad (i)$

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে শেষ পদ পর্যন্ত এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে প্রথম পদ পর্যন্ত লিখে পাওয়া যায়

$$S_n = 1+2+3+\cdots\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)+n \qquad (i)$$

এবং $$S_n = n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+3\ \ +2\ \ +1 \qquad (ii)$$

যোগ করে, $2S_n = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots\cdots\cdots+(n+1)$ [ $n$ সংখ্যক পদ ]

বা, $2S_n = n(n+1)$

$$\therefore\ S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (iii)$$

**উদাহরণ ২।** প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

**সমাধান :** আমরা $(iii)$ নং সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25\times 51 = 1275$$

$\therefore$ প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 1275.

**উদাহরণ ৩।** $1+2+3+4+\cdots\cdots+99=$ কত ?

**সমাধান :** ধারাটির প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $d=2-1=1$ এবং শেষ পদ $p=99$.

ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির $n$তম পদ $= 99$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $n$তম পদ $= a+(n-1)d$

$\therefore \quad a+(n-1)d=99$

বা, $\quad 1+(n-1)1=99$

বা, $\quad 1+n-1=99$

$\therefore \quad n=99$

বিকল্প পদ্ধতি:

যেহেতু

$$S_n=\frac{n}{2}(a+p)$$

$$\therefore\ S_{99}=\frac{99}{2}(1+99)$$

$$=\frac{99\times100}{2}=4950$$

$(iv)$ নং সূত্র হতে, সমান্তর ধারার প্রথম $n$–সংখ্যক পদের সমষ্টি–

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

সুতরাং, ধারাটির 99টি পদের সমষ্টি $S_{99}=\frac{99}{2}\{2\times1+(99-1)\times1\}=\frac{99}{2}(2+98)$

$$=\frac{99\times100}{2}=99\times50=4950$$

**উদাহরণ ৪।** $7+12+17+\cdots\cdots$ ধারাটির 30টি পদের সমষ্টি কত ?

**সমাধান :** ধারাটি প্রথম পদ $a=7$, সাধারণ অন্তর $d=12-7=5$

ধারাটি একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n=30$.

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম $n$–সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

তাহলে, 30টি পদের সমষ্টি $S_{30}=\frac{30}{2}\{2.7+(30-1)5\}=15(14+29\times5)$

$$=15(14+145)=15\times159$$

$$=2385$$

**উদাহরণ ৫।** রশিদ তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

ক) সমস্যাটিকে $n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।

খ) তিনি 18 তম মাসে কত টাকা এবং প্রথম18 মাসে মোট কত টাকা সঞ্চয় করেন ?

গ) তিনি কত বছরে মোট 106200 টাকা সঞ্চয় করেন?

**সমাধান :**

(ক) প্রশ্নানুসারে, ধারাটির প্রথম পদ a = 1200

সাধারণ অন্তর d = 100

$\therefore$ ২য় পদ = 1200 + 100 = 1300

৩য় পদ = 1300 + 100 = 1400

∴ ধারাটি 1200 + 1300 + 1400 + ..... n পর্যন্ত

(খ) আমরা জানি, n-তম পদ = a + (n –1) d

∴ 18-তম মাসে সঞ্চয় = a + (18 –1)d

= (1200 + 17 × 100) টাকা

= 2900 টাকা

আবার, প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

∴ প্রথম 18 মাসের সঞ্চয় = $\frac{18}{2}\{2\times1200+(18-1)\times100\}$ টাকা

= 9 (2400 + 1700) টাকা

= 36900 টাকা

(গ) মনে করি, তিনি n বছরে 106200 টাকা সঞ্চয় করেন।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=106200$

বা, $\frac{n}{2}\{2\times1200+(n-1)\times100\}=106200$

বা, n (2400 + 100n –100) = 212400

বা, $100n^2 + 2300n - 212400 = 0$

বা, $n^2 + 23n - 2124 = 0$

বা, $n^2 + 59n - 36n - 2124 = 0$

বা, n (n + 59) – 36 (n + 59) = 0

বা, (n + 59) (n – 36) = 0

∴ n = −59 অথবা n = 36

নির্ণেয় সময় = 36 বছর।

## অনুশীলনী ১৩·১

১। 13+20+ 27+34+ ... ... ...+ 111 ধারাটির পদ সংখ্যা কত?

ক) 10 খ) 13 গ) 15 ঘ) 20

২। 5+8+11+14+ ... ... +62 ধারাটি-

(*i*) একটি সসীম ধারা।

(*ii*) একটি গুণোত্তর ধারা।

(*iii*) এর 19 তম পদ 59।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) *i* ও *ii* খ) *i*ও*iii* গ) *ii* ও *iii* ঘ) *i*,*ii* ও *iii*

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৩-৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও

$7+13+19+25+\ldots\ \ldots$ একটি ধারা।

৩। ধারাটির 15 তম পদ কোনটি?

ক)10 খ) 89 গ) 97 ঘ) 104

৪। ধারাটিরপ্রথম 20 টি পদের সমষ্টি কত?

ক) 141 খ) 1210 গ) 1280 ঘ) 2560

৫। $2-5-12-19-\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12তম পদ নির্ণয় কর।

৬। $8+11+14+17+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির কোন পদ 392 ?

৭। $4+7+10+13+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির কোন পদ 301 ?

৮। কোনো সমান্তর ধারার $m$ তম পদ $n$ ও $n$ তম পদ $m$ হলে, $(m+n)$ তম পদ কত ?

৯। $1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির $n$ পদের সমষ্টি কত ?

১০। $8+16+24+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির প্রথম 9 টি পদের সমষ্টি কত ?

১১। $5+11+17+23+\cdots\cdots\cdots+59=$ কত ?

১২। $29+25+21+\cdots\cdots\cdots-23=$ কত ?

১৩। কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23 টি পদের সমষ্টি কত ?

১৪। একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ $-20$ হলে, এর প্রথম 31 টি পদের সমষ্টি কত ?

১৫। $9+7+5+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের যোগফল $-144$ হলে, $n$ এর মান নির্ণয় কর।

১৬। $2+4+6+8+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, $n$ এর মান নির্ণয় কর।

১৭। কোনো ধারার প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।

১৮। কোনো ধারার প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$ হলে, ধারাটির 10 টি পদের সমষ্টি কত ?

১৯। একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২০। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম $m$ পদের সমষ্টি $n$ এবং প্রথম $n$ পদের সমষ্টি $m$ হলে, এর প্রথম $(m+n)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২১। কোনো সমান্তর ধারায় $p$ তম, $q$ তম ও $r$ তম পদ যথাক্রমে $a, b, c$ হলে, দেখাও যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$

২২। দেখাও যে, $1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots+125=169+171+173+\cdots\cdots\cdots+209.$

২৩। এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছুসংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন ?

২৪। কোনো সমান্তর ধারার দুইটি নির্দিষ্ট পদ $l$ তম পদ $l^2$ এবং $k$ তম পদ $k^2$।

ক) ধারাটির প্রথম পদ $a$ সাধারণ অন্তর $d$ ধরে উদ্দিপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ তৈরী কর।

খ) $(l+k)$ তম পদ নির্ণয় কর।

গ) প্রমাণ কর ধারাটির প্রথম $(l+k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{l+k}{2}(l^2+k^2+l+k)$ ।

## প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $S_n$.

অর্থাৎ, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + n^2$

আমরা জানি,

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3$$

বা, $r^3 - (r-1)^3 = 3r^2 - 3r + 1$

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ বসিয়ে পাই,

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3.n + 1$$

যোগ করে পাই,

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots\cdots\cdots + n) + (1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1) + 1)$$

বা, $n^3 = 3S_n - 3.\dfrac{n(n+1)}{2} + n \quad \left[\because 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots\cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

বা, $3S_n = n^3 + \dfrac{3n(n+1)}{2} - n$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$
$$= \frac{n(2n^2 + 2n + n + 1)}{2} = \frac{n\{2n(n+1) + 1(n+1)\}}{2}$$

বা, $3S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\therefore \quad S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

## প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $S_n$.

অর্থাৎ, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots\cdots + n^3$

আমরা জানি, $(r+1)^2 - (r-1)^2 = (r^2 + 2r + 1) - (r^2 - 2r + 1) = 4r.$

বা, $(r+1)^2 r^2 - r^2(r-1)^2 = 4r.r^2 = 4r^3$ [ উভয়পক্ষকে $r^2$ দ্বারা গুণ করে ]

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ বসিয়ে পাই,

$$2^2.1^2 - 1^2.0^2 = 4.1^3$$
$$3^2.2^2 - 2^2.1^2 = 4.2^3$$
$$4^2.3^2 - 3^2.3^2 = 4.3^3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$(n+1)^2 n^2 - n^2(n-1)^2 = 4n^3$$

যোগ করে, $(n+1)^2.n^2 - 1^2.0^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots\cdots + n^3)$

বা, $(n+1)^2 n^2 = 4S_n$

বা, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\therefore \quad S_n = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

**প্রয়োজনীয় সূত্র**

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

**বিশেষ দ্রষ্টব্য:** $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n)^2$.

**কাজ :** ১। প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।
২। প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

## গুণোত্তর ধারা

কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হলে অর্থাৎ, যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে এবং ভাগফলকে সাধারণ অনুপাত বলে। যেমন, $2+4+8+16+32$ ধারাটির প্রথম পদ $2$, দ্বিতীয় পদ $4$, তৃতীয় পদ $8$, চতুর্থ পদ $16$, পঞ্চম পদ $32$. এখানে,

দ্বিতীয় পদের সাথে প্রথম পদের অনুপাত = $\dfrac{4}{2} = 2$, তৃতীয় পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত = $\dfrac{8}{4} = 2$

চতুর্থ পদের সাথে তৃতীয় পদের অনুপাত = $\dfrac{16}{8} = 2$, পঞ্চম পদের সাথে চতুর্থ পদের অনুপাত = $\dfrac{32}{16} = 2$.

সুতরাং, ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা। এই ধারায় যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান। উলিখিত ধারায় সাধারণ অনুপাত 2। ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি গুণোত্তর সসীম ধারা।

**ভৌত ও জীব বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে, ব্যাংক ও বীমা ইত্যাদি প্রতিষ্ঠানে এবং বিভিন্ন প্রকার প্রযুক্তিবিদ্যায় গুণোত্তর ধারার ব্যাপক প্রয়োগ আছে।**

গুণোত্তর ধারার পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট না থাকলে একে অনন্ত গুণোত্তর ধারা বলে।

গুণোত্তর ধারার প্রথম পদকে সাধারণত $a$ দ্বারা এবং সাধারণ অনুপাতকে $r$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ $a$ হলে, দ্বিতীয় পদ $ar$, তৃতীয় পদ $ar^2$, ইত্যাদি। সুতরাং, ধারাটি হবে,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots\cdots$$

**কাজ :** নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে গুণোত্তর ধারাগুলো লিখ :

(*i*) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10 (*ii*) প্রথম পদ 9, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$ (*iii*) প্রথম পদ 7, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$ (*iv*) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত 1 (*v*) প্রথম পদ 1, সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$ (*vi*) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত $-1$.

## গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ

মনে করি, যেকোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $a$, সাধারণ অনুপাত $r$, তাহলে ধারাটির

প্রথম পদ $= a = ar^{1-1}$ দ্বিতীয় পদ $= ar = ar^{2-1}$

তৃতীয় পদ $= ar^2 = ar^{3-1}$ চতুর্থ পদ $= ar^3 = ar^{4-1}$

... ... ... ... ... ...

... ... ... ... ... ...

$n$তম পদ $= ar^{n-1}$

এই $n$তম পদকেই গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $a$ ও সাধারণ অনুপাত $r$ জানা থাকলে $n$তম পদে পর্যায়ক্রমে $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ ইত্যাদি বসিয়ে ধারাটির যেকোনো পদ নির্ণয় করা যায়।

**উদাহরণ ৬।** $2+4+8+16+\cdots\cdots$ ধারাটির 10তম পদ কত ?

**সমাধান :** ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{4}{2} = 2$.

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার $n$তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির 10তম পদ $= 2 \times 2^{10-1}$

$= 2 \times 2^9 = 1024$

**উদাহরণ ৭।** $128 + 64 + 32 + \cdots\cdots\cdots$ ধারাটির সাধারণ পদ কত ?

**সমাধান :** প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 128$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$.

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ = $ar^{n-1}$

সুতরাং, ধারাটির সাধারণ পদ $= 128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^7}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1-7}} = \frac{1}{2^{n-8}}$.

**উদাহরণ ৮।** একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম ও দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে 27 এবং 9 হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ এবং দশম পদ নির্ণয় কর।

**সমাধান :** প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 27$, দ্বিতীয় পদ $= 9$

তাহলে সাধারণ অনুপাত $r = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ পঞ্চম পদ = $ar^{5-1} = 27\times\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{27\times1}{27\times3} = \frac{1}{3}$

এবং দশম পদ = $ar^{10-1} = 27\times\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{3^3}{3^3\times3^6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$.

## গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $a$, সাধারণ অনুপাত $r$ এবং পদ সংখ্যা $n$. যদি $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n$ হয়, তাহলে

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots\cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad (i)$$

এবং $r.S_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n$ [ $(i)$ কে $r$ দ্বারা গুণ করে ] $\qquad (ii)$

বিয়োগ করে, $S_n - rS_n = a - ar^n$

বা, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$

$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, যখন $r < 1$

আবার $(ii)$ থেকে $(i)$ বিয়োগ করে পাই,

$rS_n - S_n = ar^n - a$ বা, $S_n(r-1) = a(r^n-1)$

অর্থাৎ, $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$, যখন $r > 1$.

**লক্ষণীয় :** সাধারণ অনুপাত $r = 1$ হলে প্রত্যেক পদ $= a$

সুতরাং, এক্ষেত্রে $S_n = a + a + a + \cdots\cdots$ $n$ পদ পর্যন্ত

$= an$.

**কাজ :** ক তার ছেলেকে স্কুলে নেয়া-আনার জন্য এক ব্যক্তিকে ১লা এপ্রিল থেকে এক মাসের জন্য নিয়োগ করলেন। তার পারিশ্রমিক ঠিক করা হলো– প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন প্রথম দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ দুই পয়সা, তৃতীয় দিন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ চার পয়সা। এই নিয়মে পারিশ্রমিক দিলে সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি কত টাকা পাবেন ?

**উদাহরণ ৯।** $12+24+48+\cdots\cdots\cdots+768$ ধারাটির সমষ্টি কত ?

**সমাধান :** প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a=12$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{24}{12}=2>1.$

$\therefore$ ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির $n$তম পদ $=768$

আমরা জানি, $n$তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore \quad ar^{n-1}=768$

বা, $\quad 12\times 2^{n-1}=768$

বা, $\quad 2^{n-1}=\frac{768}{12}=64$

বা, $\quad 2^{n-1}=2^6$

বা, $\quad n-1=6$

$\therefore \quad n=7.$

সুতরাং, ধারাটির সমষ্টি $=\frac{a(r^n-1)}{(r-1)}, \quad$ যখন $r>1$

$$=\frac{12(2^7-1)}{2-1}=12\times(128-1)=12\times 127=1524.$$

**উদাহরণ ১০।** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

**সমাধান :** প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}<1$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

এখানে পদ সংখ্যা $n=8.$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার $n-$সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad \text{যখন } r<1.$$

সুতরাং, ধারাটির প্রথম 8টি পদের সমষ্টি $S_8=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}}$

$$=2\left(\frac{256-1}{256}\right)=\frac{255}{128}=1\frac{127}{128}$$

**উদাহরণ ১১।** পলাশ সরকার 2005 সালের জানুয়ারি মাসে বার্ষিক120000 টাকা বেতনে চাকুরিতে যোগদান করলেন। তার বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ প্রতিবছর 5000 টাকা। প্রতিবছর তার বেতন থেকে 10% ভবিষৎ তহবিল হিসাবে কর্তন করা হয়। তিনি বেতন থেকে বার্ষিক12% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে বছর শেষে একটি ব্যাংকে 12000 টাকা জমা রাখেন। তিনি 2030 সালের 31 ডিসেম্বর চাকুরি থেকে অবসরে যাবেন।

ক) পলাশ সরকারের মূল বেতন কোন ধারাকে সমর্থন করে? ধারাটি লিখ।

খ) ভবিষৎ তহবিল ব্যাতিত সে বেতন হিসাবে চাকুরি জীবনে মোট কত টাকা পাবেন?

গ) 2031 সালের 31 ডিসেম্বর ঐ ব্যাংকে মুনাফাসহ তার মোট কত টাকা জমা হবে?

**সমাধান :**

(ক) পলাশ সরকারের মূল বেতন সমান্তর ধারা সমর্থন করে।

ধারাটির প্রথম পদ $a = 120000$

সাধারণ অন্তর $= 5000$

$\therefore$ ২য় পদ $= 120000 + 5000 = 125000$

৩য় পদ $= 125000 + 5000 = 130000$

$\therefore$ ধারাটি, $120000 + 125000 + 130000 + .....$

(খ) 2005 সালের জানুয়ারি থেকে 2030 সালের 31 ডিসেম্বর পর্যন্ত মোট $(2030 - 2005 + 1)$ বা 26 বছর ভবিষ্য তহবিল ব্যতিত তাঁর বেতন বাবদ প্রাপ্য টাকার পরিমাণ

$(120000 - 120000$ এর $10\%) + (125000 - 125000$ এর $10\%) + (130000 - 130000$ এর $10\%) + .....$

$= (120000 - 12000) + (125000 - 12500) + (130000 - 13000) + .....$

$= 108000 + 112500 + 117000 + .....$

এক্ষেত্রে সৃষ্ট ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

যার ১ম পদ, $a = 1,08,000$

সাধারণ অন্তর $d = 112500 - 108000$

$= 4500$

পদসংখ্যা $n = 26$

$\therefore$ 26 বছরে তাঁর প্রাপ্য মোট বেতনের পরিমাণ $= \frac{26}{2}\{2 \times 108000 + (26-1) \times 4500\}$ টাকা

$= 13\ \{216000 + 112500\}$ টাকা

$= 13 \times 328500$ টাকা

$= 4270500$ টাকা

(গ) 2005 সাল থেকে 2031 পর্যন্ত জমা করার মোট সময় $(2031 - 2005)$ বা 26 বছর

12000 টাকার 1 বছর শেষে জমা করেন $12000\left(1 + \frac{12}{100}\right)$ টাকা

$= 12000 \times 1.12$ টাকা

12000 টাকার 2 বছর শেষে জমা করেন $= 12000 \times (1.12)^2$ টাকা

12000 টাকার 3 বছর শেষে জমা করেন $= 12000 \times (1.12)^3$ টাকা

$\therefore$ 26 বছরে তাঁর জমাকৃত মোট টাকা $= 12000 \times 1.12 + 12000 \times (1.12)^2 + .....$ 26তম পদ পর্যন্ত

$= 12000\ \{1.12 + (1.12)^2 + ..... + (1.12)^{26}\}$

$$= 12000 \times 1.12 \times \frac{(1.12)^{26}-1}{1.12-1}$$
$$= 12000 \times 1.12 \times \frac{18.04}{0.12}$$
$$= 2020488 \text{ (প্রায়)}$$

## অনুশীলনী ১৩·২

১। a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $b = \frac{c+d}{2}$ খ. $a = \frac{b+c}{2}$

গ. $c = \frac{b+d}{2}$ ঘ. $d = \frac{a+c}{2}$

২। $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য-

$(i) \sum n = \frac{n^2+n}{2}$

$(ii) \sum n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

$(iii) \sum n^3 = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $i$ ও $ii$ খ) $i$ ও $iii$ গ) $ii$ ও $iii$ ঘ) $i, ii$ ও $iii$

**নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:**

$\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

৩। ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক. 2 খ. 4

গ. $\log 2$ ঘ. $2 \log 2$

৪। ধারাটির 7ম পদ কত?

ক. $\log 32$ খ. $\log 64$

গ. $\log 128$ ঘ. $\log 256$

৫। $64 + 32 + 16 + 8 + \cdots\cdots\cdots$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

৬। $3 + 9 + 27 + \cdots\cdots\cdots$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

৭। $128 + 64 + 32 + \cdots\cdots\cdots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$ ?

৮। একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{8}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর।

৯। $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}, \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$ ?

১০। $5+x+y+135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, $x$ এবং $y$ এর মান নির্ণয় কর।

১১। $3+x+y+z+243$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, $x, y$ এবং $z$ এর মান নির্ণয় কর।

১২। $2-4+8-16+\cdots \cdots \cdots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত ?

১৩। $1-1+1-1+\cdots \cdots \cdots$ ধারাটির $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৪। $\log 2+\log 4+\log 8+\cdots \cdots \cdots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত ?

১৫। $\log 2+\log 16+\log 512+\cdots \cdots \cdots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৬। $2+4+8+16+\cdots \cdots \cdots$ ধারাটির $n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, $n$-এর মান কত ?

১৭। $2-2+2-2+\cdots \cdots \cdots$ ধারাটির $(2n+2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত ?

১৮। প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, $n$ এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৯। প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, $n$ এর মান কত ? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত ?

২০। দেখাও যে, $1^3+2^3+3^3+\cdots \cdots \cdots+10^3 = (1+2+3+\cdots \cdots \cdots+10)^2$.

২১। $\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots \cdots \cdots+n^3}{1+2+3+\cdots \cdots \cdots+n} = 210$ হলে $n$-এর মান কত ?

২২। 1 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লৌহ দন্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

২৩। একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির ৪র্থ পদ -2 এবং ৯তম পদ $8\sqrt{2}$

ক. উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় কর।

গ. ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২৪। কোনো ধারার n তম পদ 2n-4

ক. ধারাটি নির্ণয় কর।

খ. ধারাটির 10তম পদ এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২৫। দুপুর 1 টা 15 মিনিটে 1 জন এস.এস.সি পরীক্ষার রেজাল্ট জানতে পারল। 1 টা 20 মিনিটে জানল 8 জন, 1 টা 25 মিনিটে জানল 27 জন। এভাবে রেজাল্ট ছড়িয়ে পড়ল।

ক) উদ্দীপকের আলোকে প্যাটার্ন দুইটি লিখ।

খ) ঠিক 2:10 এ কত জন এবং 2:10 পর্যন্ত মোট কত জন রেজাল্ট জানতে পারবে?

গ) কয়টার সময় 6175225 জন রেজাল্ট জানতে পারবে ?